SEMI × 2024

Fundación Olimpiada Panameña de Matemática

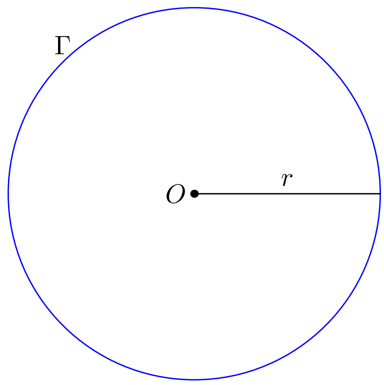
Geometría del círculo

Luis Modes
luisalbertomodes22@gmail.com

5 de febrero de 2021

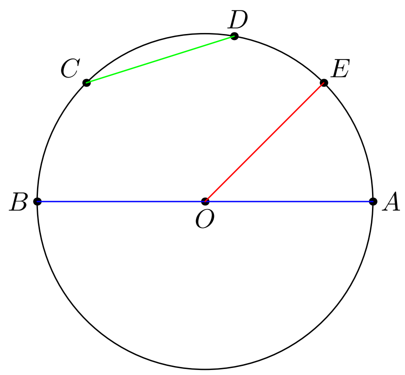
1. Definiciones

- Una *circunferencia* es el conjunto de puntos en el plano a una distancia fija llamada *radio* de un punto fijo llamado *centro*.



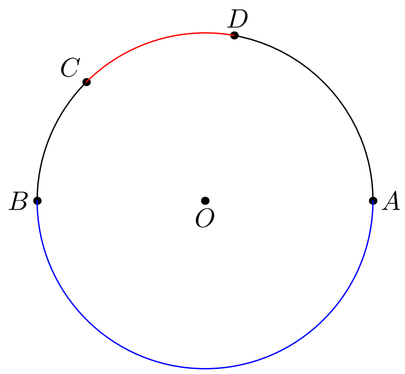
circunferencia Γ de centro O y radio r

- Al segmento que va desde centro de la circunferencia hasta cualquier punto sobre esta se le llama *radio*.
- A cualquier segmento que una dos puntos sobre la circunferencia le llamamos *cuerda*.
- A una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia le llamamos *diámetro*.



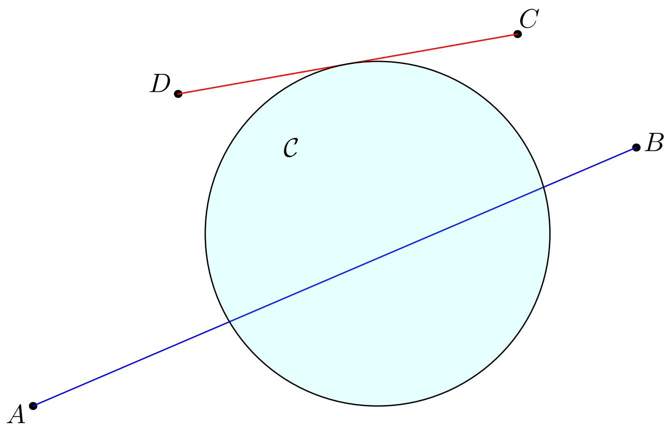
OA, OB y OE son radios, AB y CD son cuerdas y AB es diámetro

- A una porción de circunferencia le llamamos *arco*.
- A un arco que sea la mitad de la circunferencia le llamamos *semicircunferencia*.



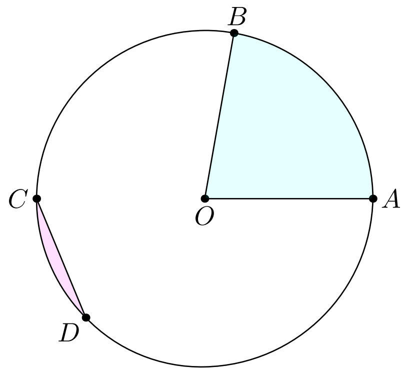
$\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ son arcos y $\widehat{AB}$ es una semicircunferencia

- A una recta que corte la circunferencia en dos puntos le llamamos *secante*.
- A una recta que toque a la circunferencia en exactamente un punto le llamamos *tangente*.
- A la región del plano comprendida dentro de una circunferencia le llamamos *círculo*.



AB es una secante, CD es una tangente y $\mathcal{C}$ es un círculo

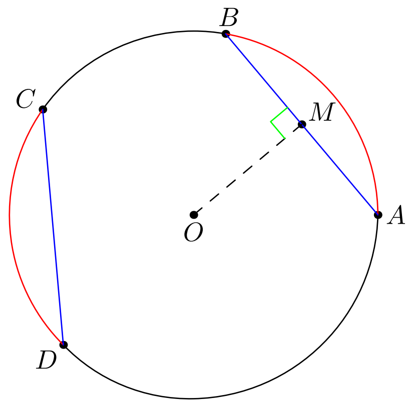
- A la región del plano comprendida entre dos radios y una arco le llamamos *sector circular*.
- A la región del plano comprendida entre una cuerda y un arco le llamamos *segmento circular*.



el sector circular del arco menor $\widehat{AB}$ y el segmento circular del arco menor $\widehat{CD}$, respectivamente

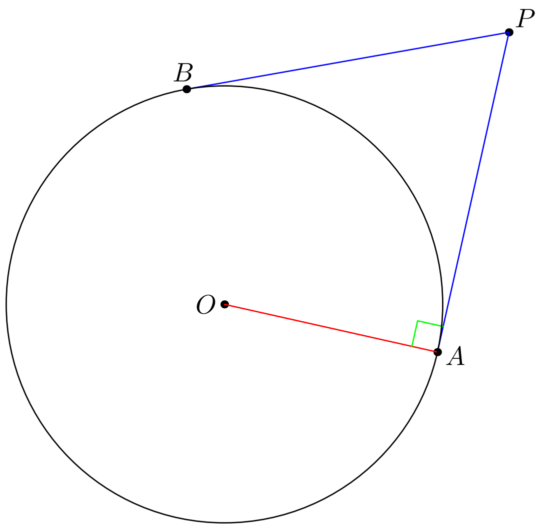
2. Propiedades de la circunferencia

- La perpendicular desde el centro de la circunferencia a cualquier cuerda biseca a dicha cuerda.
- Dos cuerdas de igual longitud abarcan arcos menores de igual longitud.



$AB = CD$, $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, $\angle BMO = 90°$ y $AM = MB$

- Los dos segmentos tangentes desde el mismo punto a la circunferencia son iguales.
- La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.



$PA = PB$ y $\angle PAO = 90°$

- La longitud o perímetro de la circunferencia es $2\pi r$
- El área del círculo es πr^2
- Si el ángulo central de un arco es $\theta°$, su longitud es $\frac{\theta°}{360°} \cdot 2\pi r$
- Si el ángulo central de un sector circular es $\theta°$, su área es $\frac{\theta°}{360°} \cdot \pi r^2$

Ejemplo 2.1: OPM Fase I 2011

Al rodar una rueda de 3 cm de radio recorre 18 m. Halle el número de vueltas completas que da la rueda.

Solución. Noten que, por cada vuelta que da, recorre una distancia igual a su perímetro, que es

$$2\pi \cdot 3\text{cm} = 6\pi \cdot \text{cm}$$

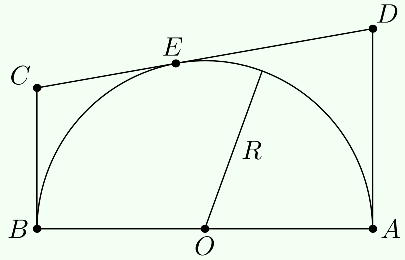
Ahora, en 18 m hay 1800 cm, por lo que la cantidad de vueltas que dio fue

$$\frac{1800\text{cm}}{6\pi \cdot \text{cm}} = \frac{300}{\pi}$$

Esa cantidad les da, si redondean π a 3.14, aproximadamente 95.54. Por lo tanto, dio 95 vueltas completas. $\square$

Ejemplo 2.2: Manual

En la siguiente figura, $BC + AD = 12$ y $AB + CD = 20$. Calcular el valor de R.



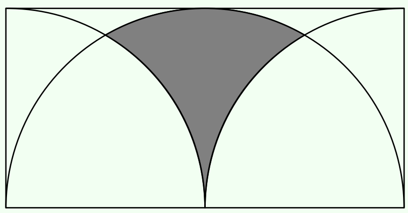
Solución. Como CE y CB son tangentes desde C, $CE = CB$. Análogamente, $DE = DA$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{AB}{2} \\ &= \frac{(AB + CD) - CD}{2} \\ &= \frac{(AB + CD) - (CE + ED)}{2} \\ &= \frac{(AB + CD) - (BC + AD)}{2} \\ &= \frac{20 - 12}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

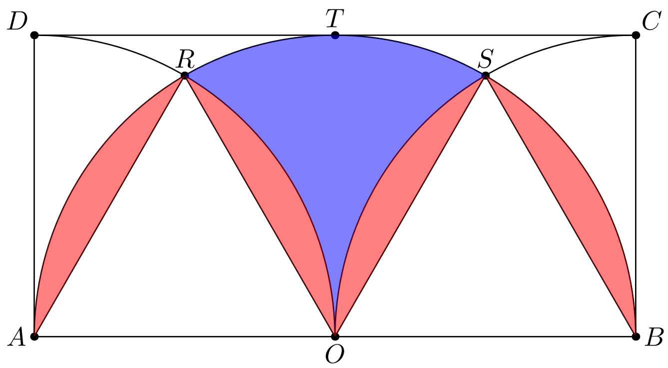
□

Ejemplo 2.3: Canguro 2020 Nivel 4

El rectángulo de la figura tiene 2 m de base y 1 m de altura. Como se ve, en este rectángulo están inscritos un semicírculo y dos cuartos de círculo. Halle el área sombreada.



Solución. Nombremos los puntos del diagrama de la siguiente manera:



Como $OA = OR = AR = 1$ por ser radios, $\triangle AOR$ y $\triangle OBS$ son equiláteros, es decir, $\angle ROA = \angle OAR = \angle BOS = \angle SBO = 60°$. Luego, el área que queremos hallar es igual al área del semicírculo menos el área de los dos equiláteros y de los cuatro segmentos circulares rojos. Sin embargo, para hallar el área de los segmentos circulares rojos, simplemente podemos restarle al sector circular de ángulo 60° el área del triángulo equilátero de lado 1, es decir, el área de cada segmento circular rojo es

$$\text{área del segmento} = \text{área del sector} - \text{área del triángulo} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

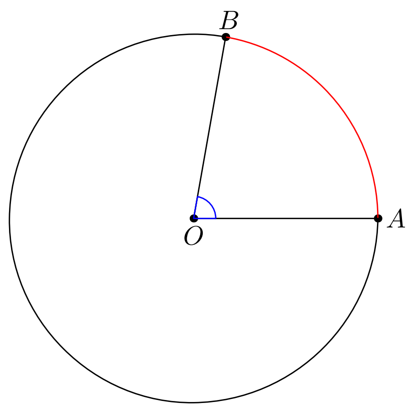
Por lo tanto, el área sombreada es

$$\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - 4 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

□

3. Ángulos en la circunferencia

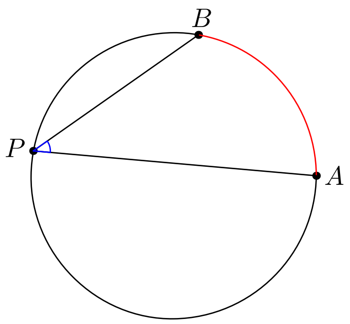
- Llamamos *ángulo central* a un ángulo cuyo vértice es el centro y sus lados son dos radios. Definimos *la medida angular de un arco* como la medida del ángulo central que lo abarca.

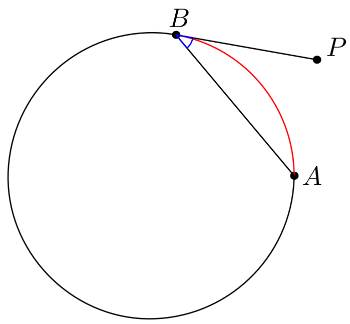


$\angle AOB = \widehat{AB}$

- Llamamos *ángulo inscrito* a un ángulo cuyo vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas. Su medida será igual a la mitad del arco que abarca.

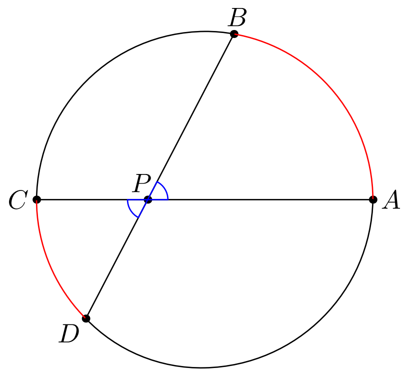
- Llamamos *ángulo semiinscrito* a un ángulo cuyo vértice está sobre la circunferencia, uno de sus lados es una cuerda y el otro lado es una tangente. Su medida será igual a la mitad del arco que abarca.





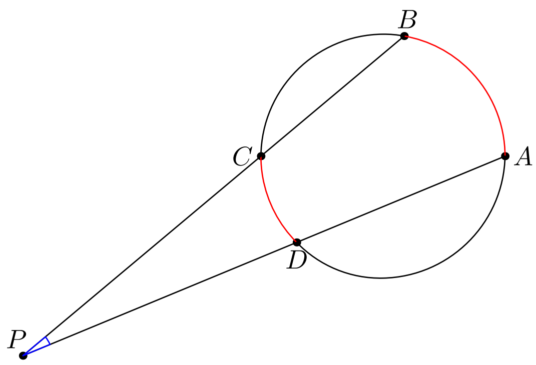
$$\angle APB = \frac{\widehat{AB}}{2} \qquad \angle ABP = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

- Llamamos *ángulo interior* a un ángulo cuyo vértice está dentro de la circunferencia. Su medida será igual a la semisuma de los arcos que abarca.



$$\angle APB = \angle CPD = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

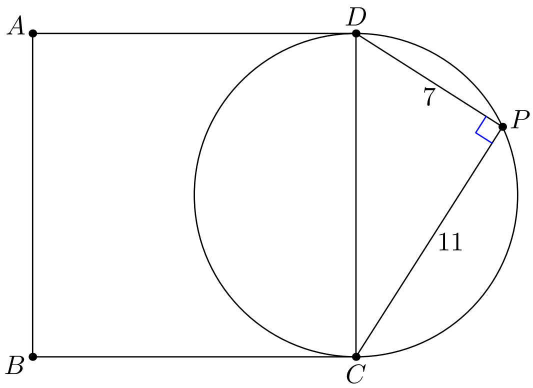
- Llamamos *ángulo exterior* a un ángulo cuyo vértice está fuera de la circunferencia. Su medida será igual a la mitad de la diferencia de los arcos que abarca.



$$\angle DPC = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

Ejemplo 3.1: OPM Fase I 2012

Sea $ABCD$ un cuadrado y P un punto en la circunferencia de diámetro $\overline{CD}$. Si $CP = 11$, $PD = 7$, halle el área en unidades cuadradas del cuadrado.



Solución. Notemos que, como el arco $\overset{\frown}{CD}$ es una semicircunferencia, mide $180°$. Luego,

$$\angle DPC = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

Entonces, PDC es rectángulo. Finalmente, por el teorema de Pitágoras,

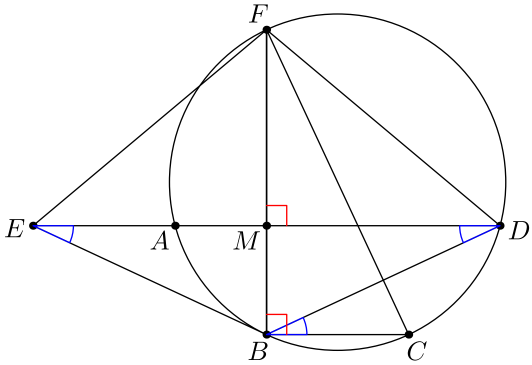
$$\text{área de } ABCD = CD^2 = 7^2 + 11^2 = 170$$

□

Ejemplo 3.2: OPM Fase II 2013

Se escogen cuatro puntos en una circunferencia de tal manera que los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ tengan la misma longitud, y el arco $\overset{\frown}{AD}$ sea de mayor longitud que los tres anteriores. La recta $\overleftrightarrow{AD}$ y la recta tangente a la circunferencia en B se cortan en E. Sea F el punto opuesto del diámetro de la circunferencia que tiene extremo C. Demuestre que el triángulo DEF es isósceles.

Solución. Sea M el punto medio de ED.



Noten que, como $\angle BED$ es un ángulo exterior y $\angle ADB$ es inscrito,

$$\begin{aligned}\angle BED &= \frac{\widehat{BD} - \widehat{AB}}{2}\\ &= \frac{2\widehat{AB} - \widehat{AB}}{2}\\ &= \frac{\widehat{AB}}{2}\\ &= \angle ADB\\ &= \angle EDB\end{aligned}$$

Luego, $\triangle BDE$ es isósceles con $BE = BD$. Noten que, como CF es diámetro, $BC \perp BF$. Ahora, como

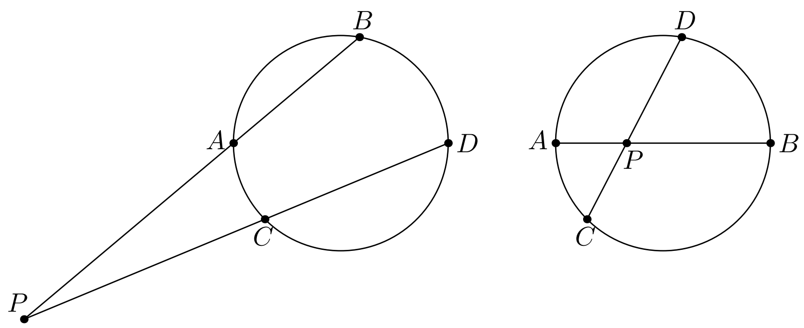
$$\angle EDB = \angle ADB = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2} = \angle CBD,$$

por ángulos alternos internos, $BC \parallel DE$. Sin embargo esto implicaría que también $DE \perp BF$, pero, como $\triangle BDE$ es isósceles, $DE \perp BM$. Por lo tanto, $B - M - F$ son colineales, por lo que MF es altura de $\triangle FED$ y a la vez biseca su base. Finalmente, esto implica que $\triangle FED$ es isósceles.

$\square$

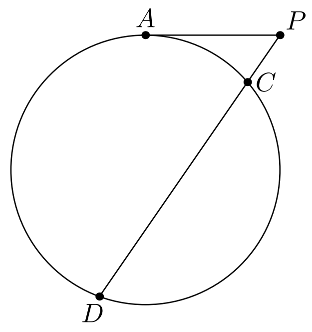
4. Potencia de punto

- Si A, B, C, D están sobre una circunferencia y las rectas AB y CD se cortan en P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

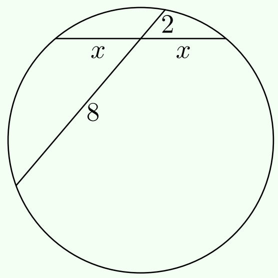
- Si A, C, D están sobre una circunferencia y la recta CD corta a la tangente por A en P, entonces $PA^2 = PC \cdot PD$.



$PA^2 = PC \cdot PD$

Ejemplo 4.1

Calcule el valor de x en la siguiente figura:



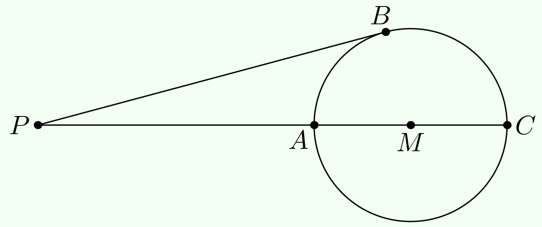
Solución. Por potencia de punto,

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 2 \cdot 8 \\
x^2 &= 16 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 4.2: Canguro 2017 Nivel 5

Sean A, B y C puntos de la circunferencia de centro M, como se ve en la figura. PB es tangente a la circunferencia en B. Las distancias PA y MB son enteras, y $PB = PA + 6$. ¿Cuántos valores posibles hay para MB?



Solución. Por la potencia de punto de P con respecto a la circunferencia,

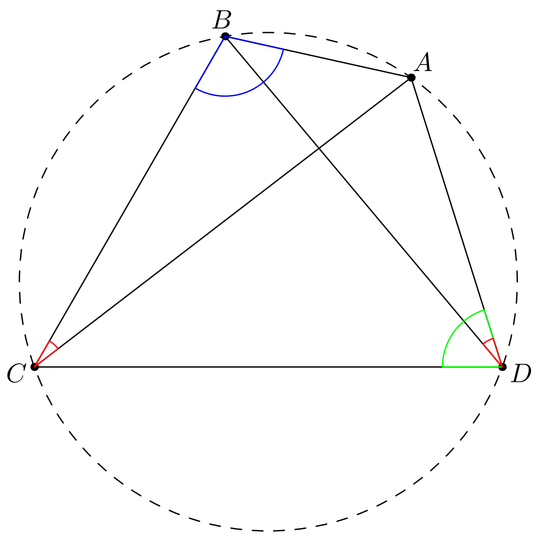
$$\begin{aligned} PB^2 &= PA \cdot PC \\ (PA+6)^2 &= PA \cdot (PA + 2MB) \\ PA^2 + 12PA + 36 &= PA^2 + 2PA \cdot MB \\ 12PA + 36 &= 2PA \cdot MB \\ MB &= 6 + \frac{18}{PA} \end{aligned}$$

Luego, PA tiene que ser un divisor positivo de 18, y para cada valor de PA hay un valor distinto para MB. Por lo tanto, como 18 tiene 6 divisores, la respuesta es 6 y terminamos.

□

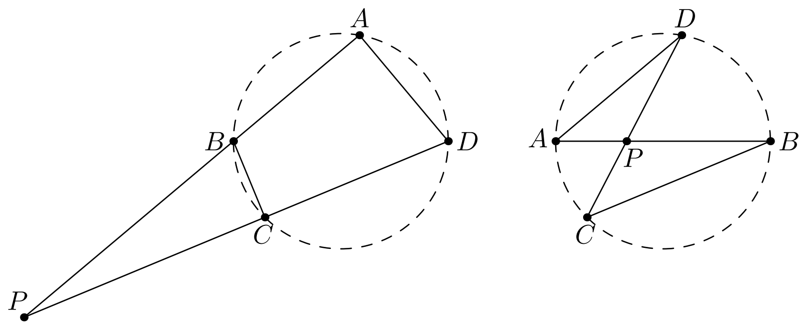
5. Cuadriláteros cíclicos

- Decimos que un cuadrilátero es cíclico si sus vértices están sobre una circunferencia.
- Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si $\angle CBA + \angle ADC = 180°$
- Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si $\angle ACB = \angle ADB$



$\angle CBA + \angle ADC = 180°$ y $\angle ACB = \angle ADB$

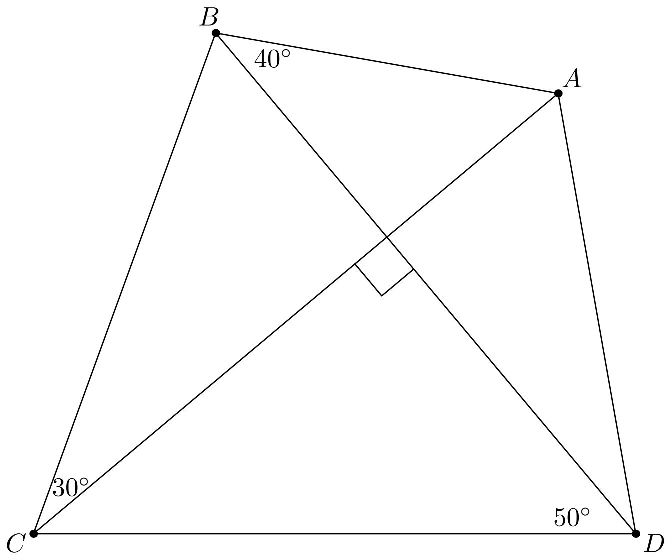
- (Potencia de punto) Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si el punto P en que se cortan las rectas AB y CD cumple que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Ejemplo 5.1: EGMO

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle DBA = 40°$, $\angle ACB = 30°$, $\angle BDC = 50°$ y $AC \perp BD$. Halle todos los ángulos del cuadrilátero.



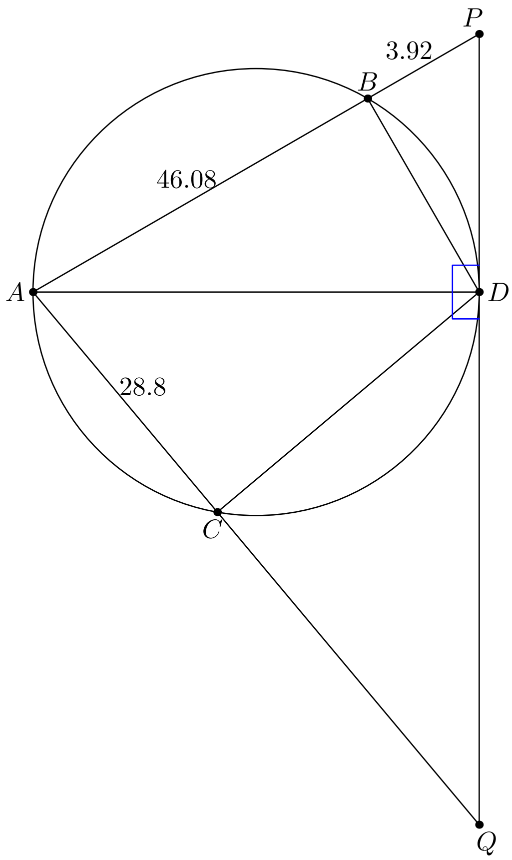
Solución. Como $\angle DBA = 40° = 90° - 50° = \angle DCA$, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Por lo tanto,

- $\angle A = \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle BAC + \angle CBD = 50° + 60° = 110°$
- $\angle B = \angle CBA = \angle CBD + \angle DBA = 60° + 40° = 100°$
- $\angle C = \angle DCB = 180° - \angle BAD = 180° - 110° = 70°$
- $\angle D = \angle ADC = 180° - \angle CBA = 180° - 100° = 80°$

□

Ejemplo 5.2: OPM Fase II 2014

En una circunferencia se consideran cuatro puntos distintos A, B, C, D tales que $\overline{AD}$ es diámetro, y se traza la recta tangente por el punto D. Sean P el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con la tangente y Q el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ con la tangente. Si $AB = 46.08$, $AC = 28.80$ y $BP = 3.92$, calcular la medida del segmento $\overline{CQ}$.



Solución 1. Como PD es tangente, por potencia de punto,

$$
\begin{aligned}
PD^2 &= PB \cdot PA \\
PD^2 &= 3.92 \times 50 \\
PD^2 &= 196 \\
PD &= 14
\end{aligned}
$$

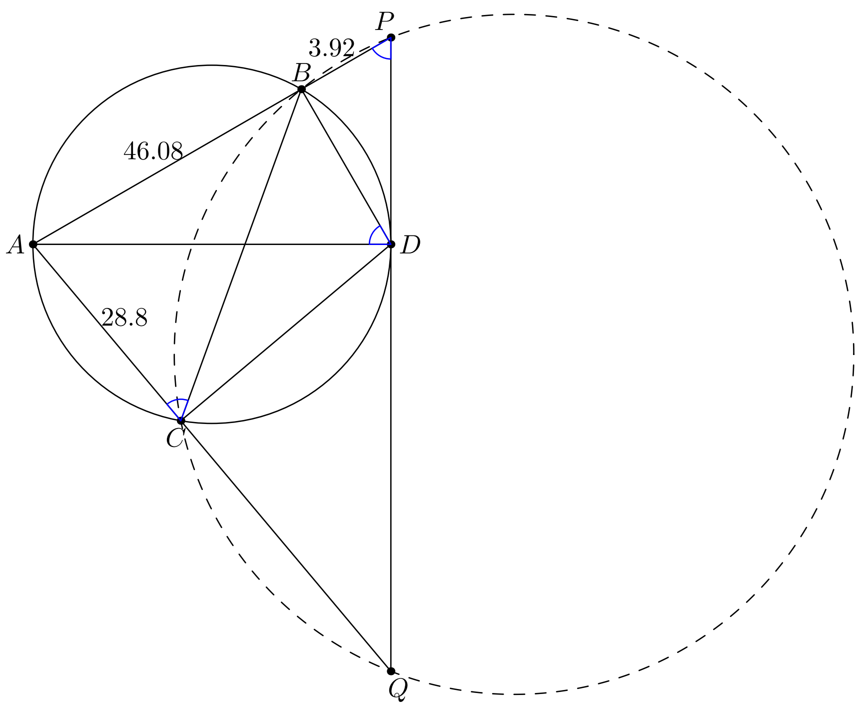
Ahora, por Pitágoras en $\triangle ADP$.

$$
\begin{aligned}
AD^2 + PD^2 &= AP^2 \\
AD^2 &= AP^2 - PD^2 \\
AD^2 &= 50^2 - 14^2 \\
AD^2 &= 2304 \\
AD &= 48
\end{aligned}
$$

Ahora, como DQ es tangente, por potencia de punto, $DQ^2 = QC \cdot QA$. Sin embargo, por Pitágoras, $DQ^2 = AQ^2 - AD^2$. Luego,

$$
\begin{aligned}
QC \cdot QA &= AQ^2 - AD^2 \\
CQ \cdot (CQ + AC) &= (CQ + AC)^2 - 48^2 \\
CQ^2 + 28.8 \cdot CQ &= CQ^2 + 2 \cdot 28.8 \cdot CQ + 28.8^2 - 2304 \\
1474.56 &= 28.8 \cdot CQ \\
CQ &= 51.2
\end{aligned}
$$

□



Solución 2. Como AD es diámetro y PQ es tangente,

$$\angle DCA = \angle ABD = \angle ADQ = \angle PDA = 90^\circ$$

Además, como $ACDB$ es cíclico,

$$\begin{aligned}\angle BPQ &= \angle BPD \\ &= 90^\circ - \angle PDB \\ &= \angle BDA \\ &= \angle BCA \\ &= 180^\circ - \angle QCB\end{aligned}$$

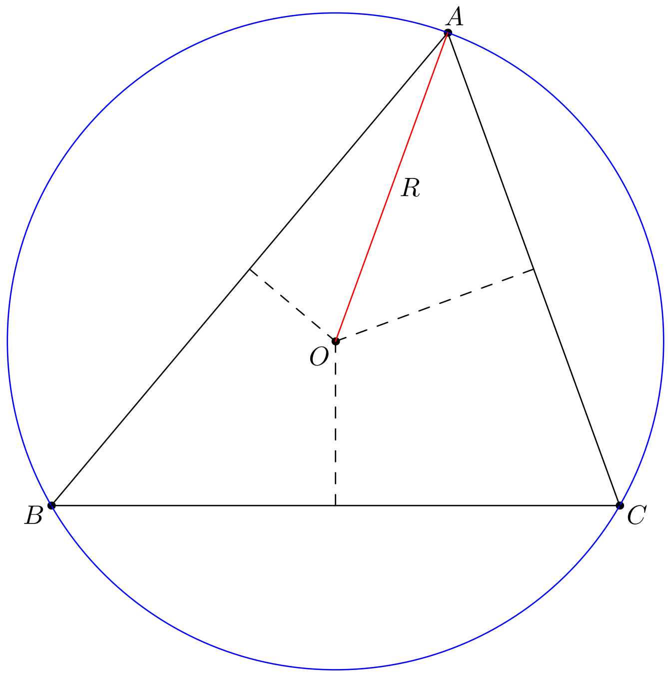
Luego, el cuadrilátero $BCQP$ es cíclico. Por lo tanto, por la potencia de punto desde A,

$$\begin{aligned}AC \cdot AQ &= AB \cdot AP \\ AC \cdot (AC + CQ) &= AB \cdot (AB + BP) \\ 28.8 \cdot (28.8 + CQ) &= 46.08 \cdot (46.08 + 3.92) \\ CQ &= \frac{50 \cdot 46.08}{28.8} - 28.8 \\ CQ &= 51.2\end{aligned}$$

□

6. Otras cosas interesantes

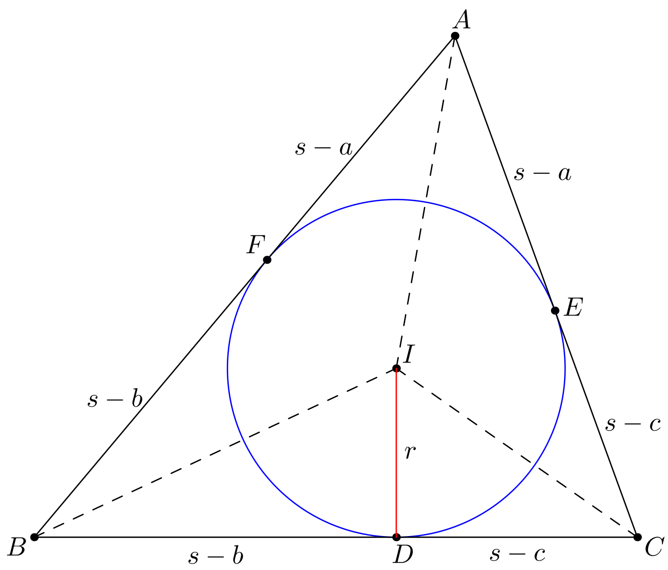
- Definimos el *circuncírculo* de un triángulo como la única circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.
- Definimos el *circuncentro* y el *circunradio* de un triángulo como el centro y el radio del circuncírculo, respectivamente.
- Las mediatrices de los tres lados del triángulo concurren en el circuncentro.



- (Ley de los senos generalizada) Si a, b, c son los lados de un triángulo y α, β, γ sus ángulos opuestos, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$

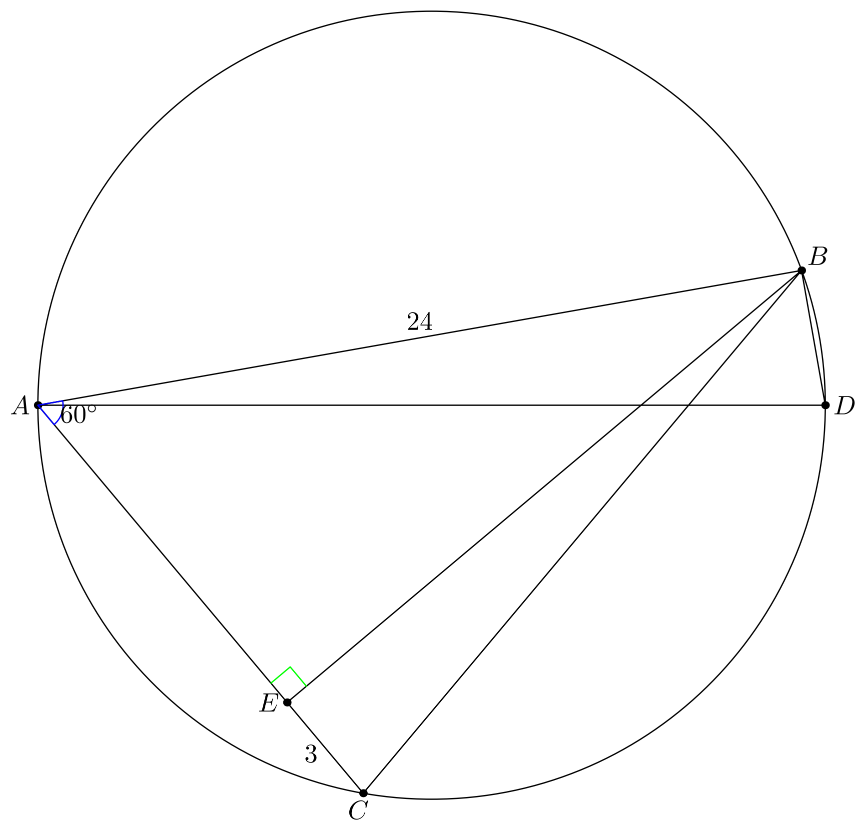
- Si el circunradio de un triángulo es R y sus lados son a, b, c, entonces su área es $\frac{abc}{4R}$.
- Definimos el *incírculo* de un triángulo como la única circunferencia que es internamente tangente a los tres lados del triángulo.
- Definimos el *incentro* y el *inradio* de un triángulo como el centro y el radio del incírculo, respectivamente.
- Las bisectrices de los tres ángulos del triángulo concurren en el incentro.
- Si el inradio de un triángulo es r y $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ es su semiperímetro, entonces su área es sr.
- Si el incírculo de un triángulo ABC toca a los lados BC, AC y AB en D, E, F, respectivamente, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ y s es su semiperímetro, entonces $AE = AF = s - a$, $BD = BF = s - b$ y $CD = CE = s - c$



- En el plano cartesiano, la ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Ejemplo 6.1: Canguro 2018 Nivel 5

Dos cuerdas AB y AC se dibujan en una circunferencia de diámetro AD. El ángulo $\angle BAC = 60°$, E es un punto sobre AC, BE es perpendicular a AC, $\overline{AB}$ =24 cm y $\overline{EC}$ =3 cm . ¿Cuál es la longitud de la cuerda BD?



Solución. Notemos que

$$BE = AB \operatorname{sen} 60^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

Ahora, por Pitágoras,

$$BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \sqrt{432 + 9} = 21$$

Por la Ley de los senos extendida,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \angle CAB}{BC} &= \frac{1}{2R} \\ \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{21} &= \frac{1}{AD} \\ AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{42} &= 1 \\ AD &= 14\sqrt{3} \end{aligned}$$

Finalmente, por Pitágoras,

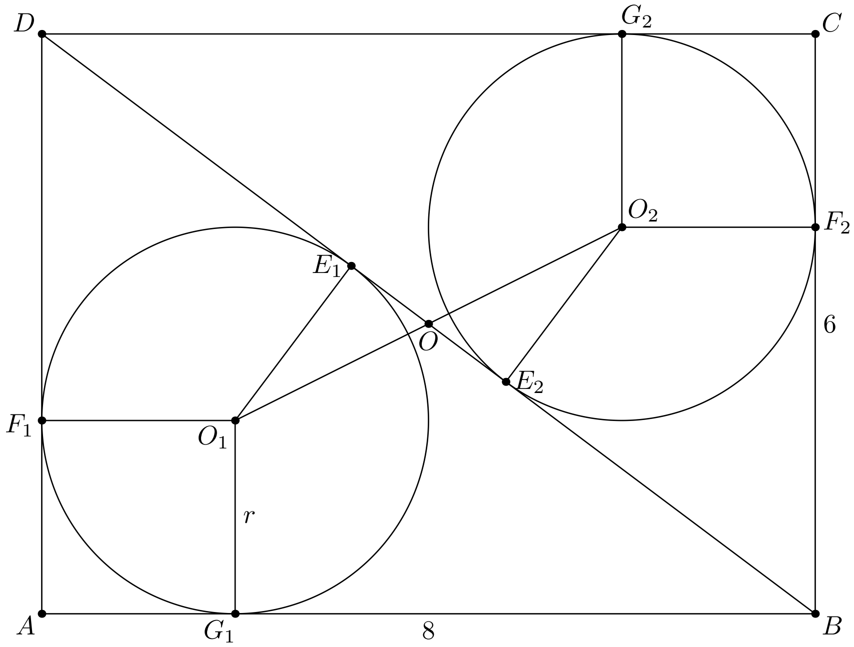
$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{(14\sqrt{3})^2 - 24^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

□

Ejemplo 6.2: OPM Fase II 2010

El rectángulo $ABCD$ tiene sus lados de longitud $AB = 8$ y $BC = 6$. Considera las circunferencias con centros en O_1 y O_2 inscritas en los triángulos ABD y BCD. Encuentre la distancia entre O_1 y O_2.

Solución. Tracemos las circunferencias inscritas y nombremos a sus puntos de tangencia.



Por Pitágoras, obtenemos que $BD = 10$. Ahora, como $ABCD$ es un rectángulo y $\triangle ABD \cong \triangle CDB$, si O es el punto medio de DB, $O_1 - O - O_2$ serán colineales y además O será el punto medio de O_1O_2. (También lo podemos visualizar por simetría). Ahora, como AF_1 y AG_1 son tangentes al incírculo desde A, $AF_1 = AG_1$. Sin embargo, también tenemos que $O_1F_1 \perp F_1A$ y $O_1G_1 \perp G_1A$. Luego, $AG_1O_1F_1$ es un rombo y un rectángulo, es decir, un cuadrado. Luego, se sigue que, si r es el inradio de $\triangle ABD$, $O_1F_1 = O_1G_1 = AG_1 = AF_1 = r$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} sr &= [ABD] \\ \left(\frac{6+8+10}{2}\right)r &= \frac{6\cdot 8}{2} \\ 12r &= 24 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

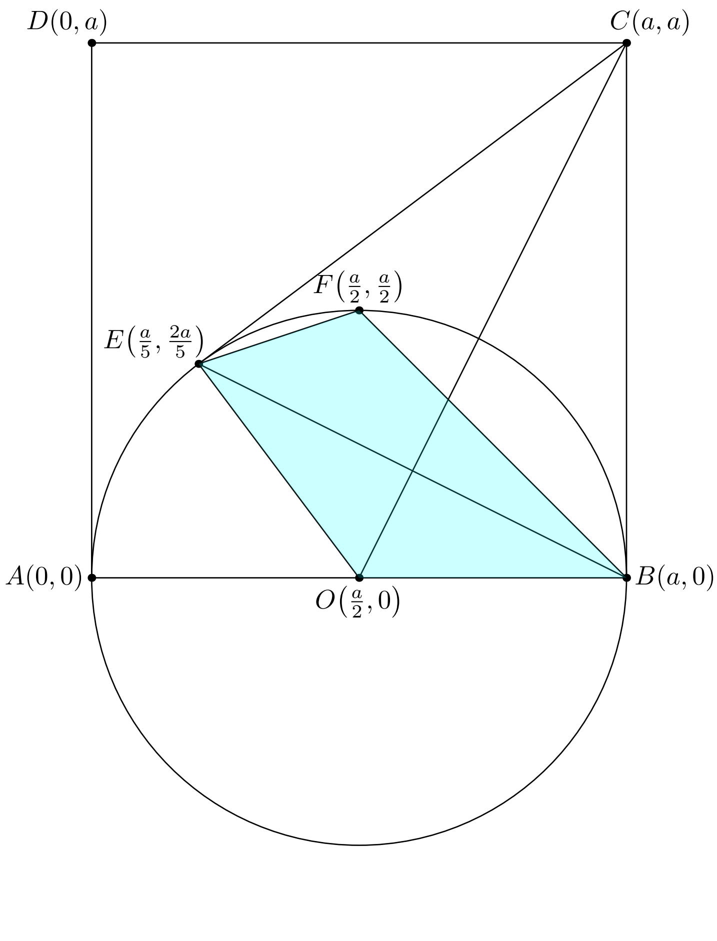
Finalmente,

$$\begin{aligned}
O_1O_2 &= 2OO_1\\
&= 2\sqrt{E_1O_1^2 + E_1O^2}\\
&= 2\sqrt{r^2 + (DO - DE_1)^2}\\
&= 2\sqrt{r^2 + \left(\frac{BD}{2} - (s - AB)\right)^2}\\
&= 2\sqrt{2^2 + \left(\frac{10}{2} - (12 - 8)\right)^2}\\
&= 2\sqrt{4 + (5 - 4)^2}\\
&= 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.3: OPM Fase II 2011

Considere el cuadrado $ABCD$ con lado de longitud a. Se construye la semicircunferencia de diámetro a, incluida en el cuadrado sobre el lado $\overline{AB}$. El segmento $\overline{CE}$ es tangente a la semicircunferencia en un punto E distinto de B, F es el centro del cuadrado y O el centro de la semicircunferencia. Determine el área del cuadrilátero $OBEF$.



Solución. Para resolver este problema con geometría euclídea, mi consejo es prolongar CE hasta cortar a AB y luego trabajar con los muchos triángulos rectángulos que habrá (esa fue mi solución original). Sin embargo, aquí presentaremos una solución por geometría analítica inspirada por mi profesor, Roberto Asprilla. Tomemos A como el origen y AB, AD como los ejes X, Y, respectivamente. Tenemos tres coordenadas evidentes:

- O: $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$
- B: $(a, 0)$
- F: $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Hallemos las coordenadas de E. Noten que, como CE y CB son tangentes y O es el centro, $CE = CB$ y $OE = OB$, por lo que CO es la mediatriz de EB. Luego, $CO \perp EB$. Ahora, notemos que la pendiente de la recta CO es 2. Luego, como $CO \perp EB$, la pendiente de EB será $-\frac{1}{2}$. Además, pasa por B, que es $(a, 0)$. Entonces, usando la forma punto-pendiente, ya podemos calcular su ecuación:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \frac{y-0}{x-a} \\ -x+a &= 2y \\ x+2y-a &= 0 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la recta EB es $x + 2y - a = 0$. Sabemos que E es la intersección de EB con la circunferencia. Ahora, como el centro de esta circunferencia es $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y su radio es $\frac{a}{2}$, su ecuación será

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

Ahora, calculemos su intersección con EB resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+2y-a &= 0 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Despejando x y sustituyendo,

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{a^2}{4} \\ \left(a - 2y - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{a^2}{4} \\ \frac{a^2}{4} - 2ay + 4y^2 + y^2 &= \frac{a^2}{4} \\ y(5y-2a) &= 0 \end{aligned}$$

Luego, los dos puntos de intersección de EB y la circunferencia tienen coordenadas y igual a 0 y $\frac{2}{5}a$. Sin embargo, el $y = 0$ sabemos que es la coordenada de B, por lo que la de E será $\frac{2}{5}a$. Ahora solo despejamos en la ecuación de EB para hallar su coordenada x:

$$\begin{aligned} x + 2y - a = 0 \\ x &= a - 2\left(\frac{2}{5}a\right) \\ x &= \frac{a}{5} \end{aligned}$$

Luego, las coordenadas de E son $\left(\frac{a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$. ¡Listo! Ahora solamente usamos la fórmula de área:

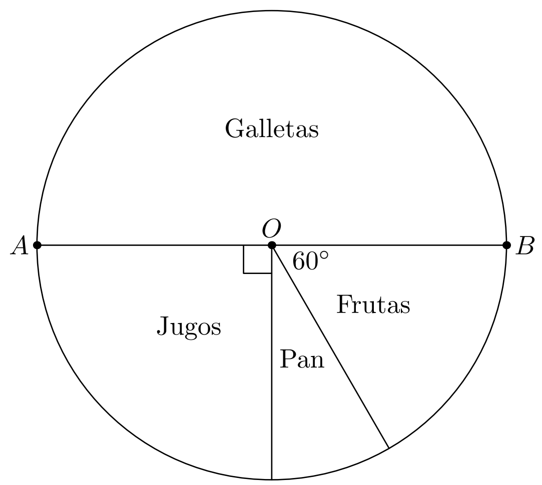
$$\begin{aligned} [OBFE] &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ a & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{5} & \frac{2a}{5} \end{vmatrix} \\ &= \frac{0 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{5} + 0 - (\frac{a^2}{10} + 0 + 0 + \frac{a^2}{5})}{2} \\ &= \frac{a^2}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área buscada es $\frac{a^2}{5}$. □

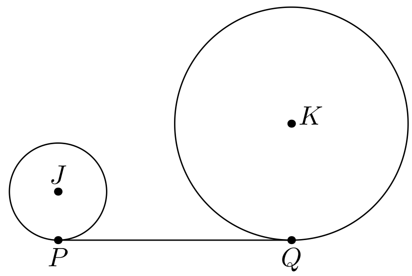
7. Problemas

Problema 1 (OPM Fase I 2014). El diámetro de una circunferencia pequeña es el radio de una circunferencia más grande. ¿Qué porcentaje del área de la circunferencia grande representa el área de la circunferencia pequeña?

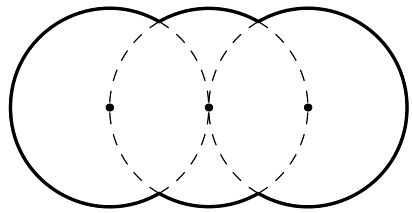
Problema 2 (OPM Fase I 2012). El diagrama que se muestra es un círculo de centro O y de diámetro $\overline{AB}$ y representa la preferencia de alimentos en la merienda de 600 estudiantes. Halle la cantidad de estudiantes que prefieren pan.



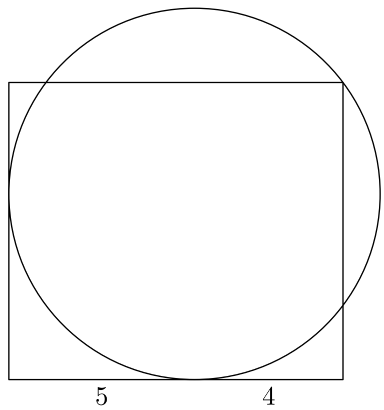
Problema 3 (Canguro 2020 Nivel 4). En la figura, el punto J es el centro de la circunferencia de radio 5 cm y K es el centro de la circunferencia de radio 12 cm. La distancia de J a K es 25 cm. El segmento PQ es tangente a ambas circunferencias, como se ve en la figura. Halle la longitud de PQ.



Problema 4 (Canguro 2019 Nivel 5). La figura mostrada está construida con arcos de tres circunferencias iguales de radio R, que tienen sus centros alineados. La circunferencia del medio pasa por los centros de las otras dos, como se muestra. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



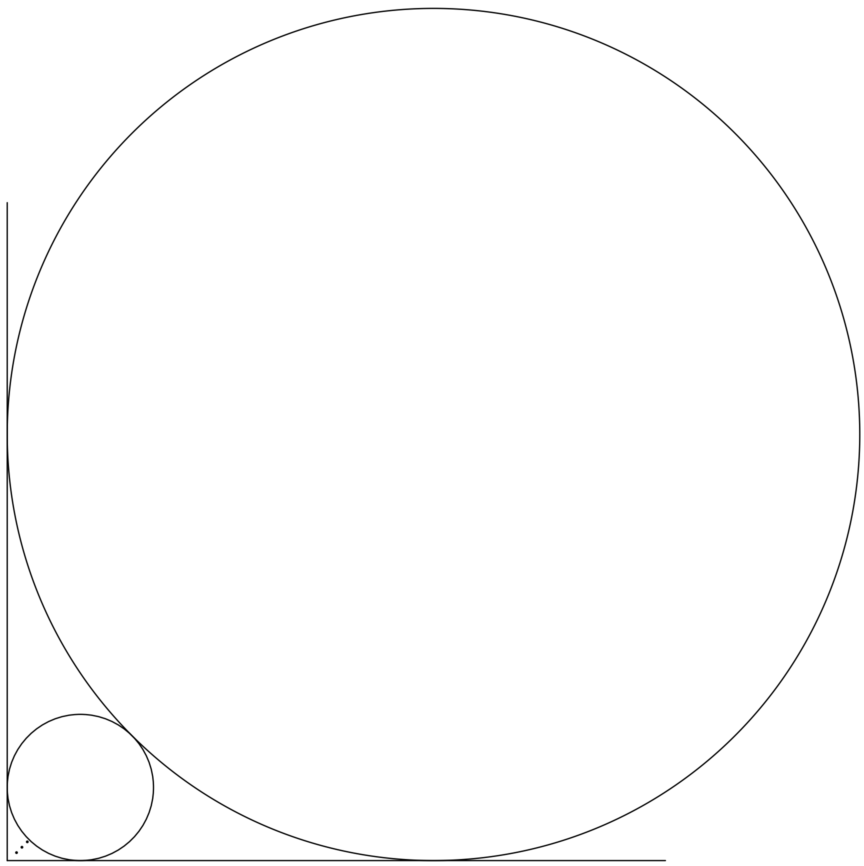
Problema 5 (Canguro 2020 Nivel 6). Tenemos un rectángulo y una circunferencia, la cual es tangente a dos de los lados del rectángulo y pasa por uno de sus vértices, como se muestra en la figura. Uno de los puntos de contacto divide a uno de los lados del rectángulo en dos segmentos de longitudes 5 y 4, respectivamente. ¿Cuál es el área del rectángulo?



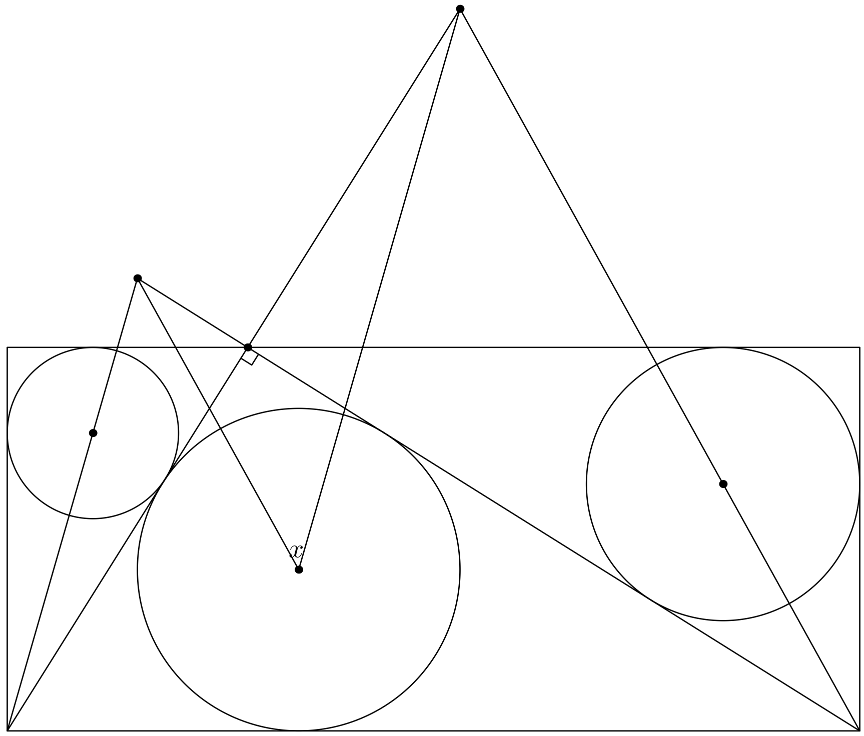
Problema 6 (Luis Modes). Sean A, B y C puntos sobre una circunferencia Γ tales que $\overline{BC}$ es diámetro de Γ. La recta tangente a Γ que pasa por A corta a la recta BC en el punto D. Sea E un punto sobre la recta AB tal que $DE \perp AE$. Si $\overline{AD} = 1 + \sqrt{5}$ y $\overline{DB} = 2$, pruebe que el triángulo AEC es isósceles.

Problema 7 (Manual de Olimpiadas). Una circunferencia r tiene una cuerda $\overline{AB}$ de longitud 10 y una cuerda $\overline{CD}$ de longitud 7, las cuales se extienden por B y C, respectivamente, hasta cortarse en P fuera de la circunferencia. Además, se tiene que $\angle APD = 60°$ y $BP = 8$. Halle el valor de r^2.

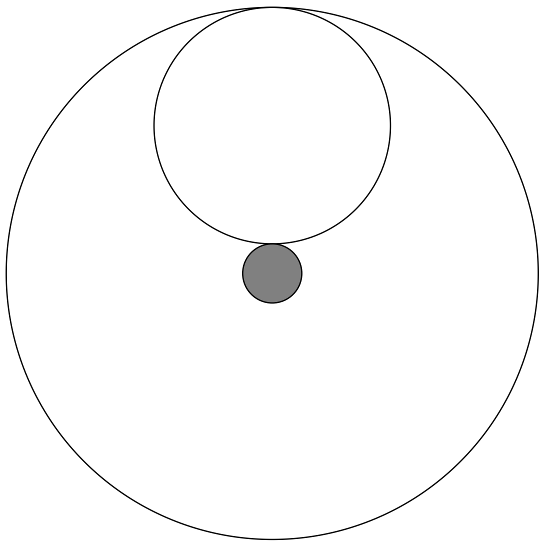
Problema 8 (OPM Fase II 2012). Considere dos rectas perpendiculares y tangentes al círculo unitario. Ahora, dibuje un círculo de menor radio tangente al círculo unitario y a las dos rectas trazadas. Luego, dibuje un tercer círculo de menor radio tangente a las dos rectas y al segundo círculo. Continúe este proceso indefinidamente. Halle el radio del décimo círculo (asumiendo que el unitario fue el primero) dibujado en este proceso.



Problema 9 (gercekboss). Hallar la medida del ángulo x en la siguiente figura.



Problema 10 (Canguro 2018 Nivel 5). Dos circunferencias concéntricas de radios 1 y 9 delimitan una corona circular. En su interior se dibujan n circunferencias no secantes entre sí, y tangentes a las dos circunferencias concéntricas. La figura muestra el caso particular para $n = 1$. ¿Cuál es el mayor valor posible de n?

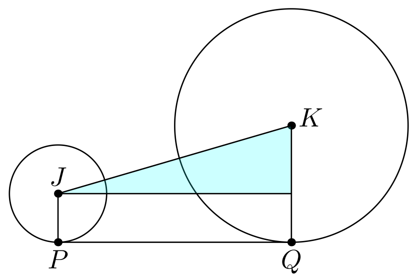


8. Respuestas y esquema de solución

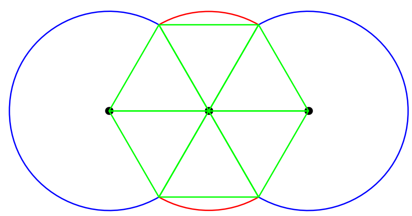
Problema 1. La respuesta es 25 %. Simplemente hay que observar que si $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{r^2\pi}{R^2\pi} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Problema 2. La respuesta es 50. Noten que el ángulo que le corresponde al sector circular que abarca el pan es 30°. Luego, como $\frac{30°}{360°} = \frac{1}{12}$, eso quiere decir que $\frac{1}{12}$ de los estudiantes prefieren pan.

Problema 3. La respuesta es 24 cm. Es evidente luego de utilizar el Teorema de Pitágoras.



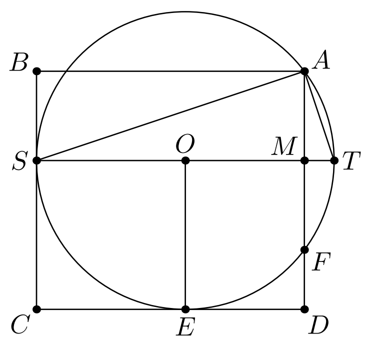
Problema 4. La respuesta es $\frac{10\pi R}{3}$ cm.



Por la misma razón que en el Ejemplo 2.3, los triángulos verdes son equiláteros. Luego, los arcos azules tienen un ángulo de 120° inscritos en ellos, por lo que deben medir 240°. Asimismo, los arcos rojos deberán medir 60° por comprender un ángulo central de 60°. Por lo tanto, el perímetro buscado es

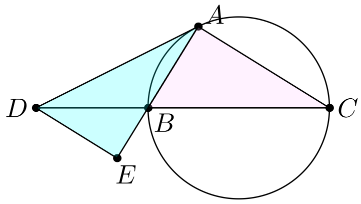
$$2 \cdot \text{azules} + 2 \cdot \text{rojos} = 2 \cdot \frac{240°}{360°} \cdot 2\pi R + 2 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi R = \frac{10\pi R}{3}$$

Problema 5. La respuesta es 72.

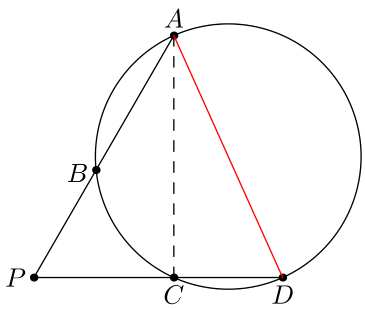


Por tangentes, $CEOS$ es un cuadrado, por lo que todos sus lados miden 5. Luego, ST debe medir 10, y como $SM = 9$, $MT = 1$. Noten que $\triangle SMA \sim \triangle AMT$, por lo que podemos hallar que $AM = 3$. De aquí ya podemos hallar que los lados del rectángulo son 8 y 9.

Problema 6. Por potencia de punto, $DA^2 = DB \cdot DC$. De aquí podemos encontrar que $BC = 1 + \sqrt{5} = DA$. Luego, $\triangle ADE \cong \triangle CBA$ y terminamos.

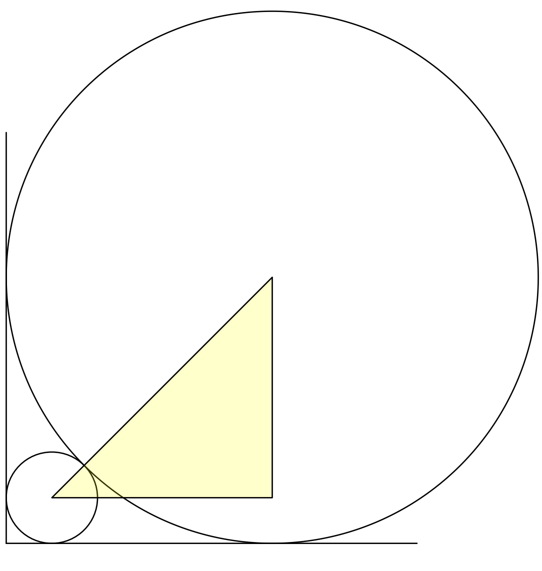


Problema 7. La respuesta es 73.



Por potencia de punto, hallamos que $PC = 9$. En consecuencia, $\triangle APC$ tiene que ser un triángulo rectángulo especial $30° - 60° - 90°$. Entonces, $AC = 9\sqrt{3}$, y por Pitágoras en $\triangle ACD$ terminamos, pues $AD = 2r$.

Problema 8. La respuesta es $(3 - 2\sqrt{2})^9$.

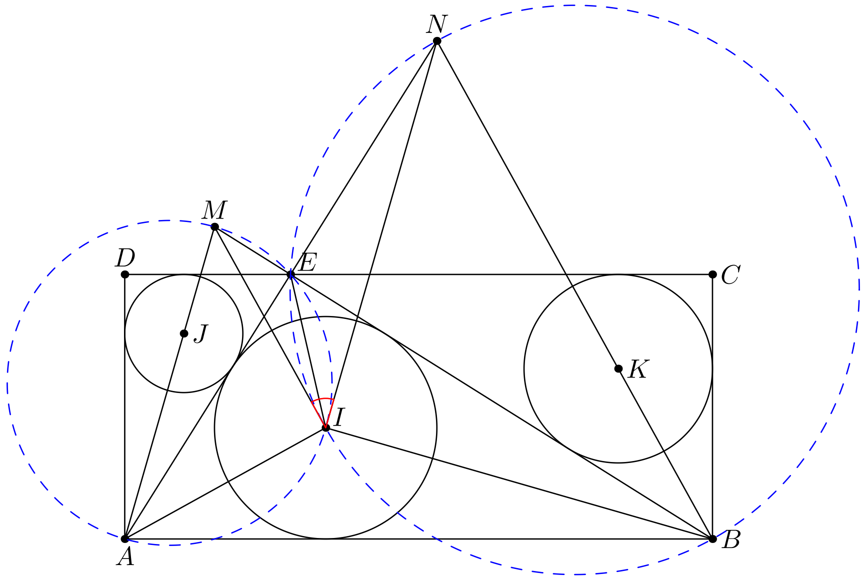


Si la circunferencia grande tiene radio R y la pequeña tiene radio r, por Pitágoras en el triángulo amarillo,

$$\begin{aligned} 2(R-r)^2 &= (R+r)^2 \\ r^2 - 6Rr + R^2 &= 0 \\ r &= (3 \pm 2\sqrt{2})R \end{aligned}$$

Como $r < R$, tiene que suceder que $r = (3 - 2\sqrt{2})R$. Esto quiere decir que el radio de una nueva cicunferencia en este proceso es simplemente el radio anterior multiplicado por $3 - 2\sqrt{2}$. Por lo tanto, terminamos.

Problema 9. La respuesta es 45°.



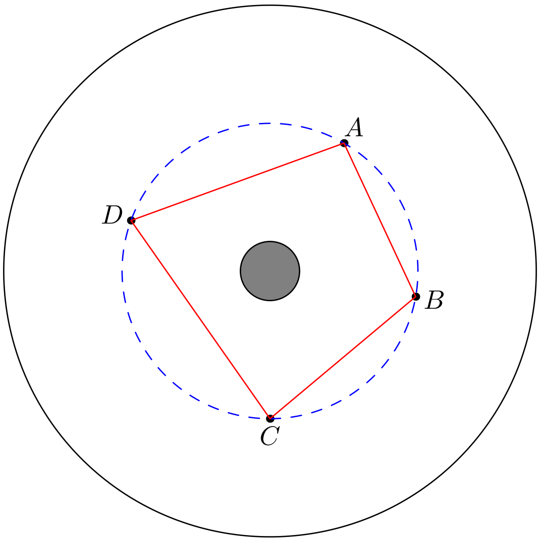
Como AI, AJ, y EI son bisectrices,

$$\angle IAM + \angle MEI = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$$

por lo que $MAIE$ es cíclico. Análogamente, $NEIB$ es cíclico. Por lo tanto,

$$x = \angle NIE + \angle EIM = \angle NBE + \angle EAM = \frac{\angle CBE + \angle EAD}{2} = 45^\circ$$

Problema 10. La respuesta es 3. No es difícil convencerse de que $n = 3$ es posible. Ahora, demostremos que no puede darse que $n = 4$ (y por tanto, tampoco que $n \geq 4$). Para ello, procedamos por contradicción, es decir, asumamos que $n = 4$ es posible a ver qué pasa. Digamos que hay 4 circunferencias de centros A, B, C, D tangentes a las de radio 1 y 9 y que no son secantes entre sí.



Como estas circunferencias tienen todas radio 4, sus centros están a distancia 5 del centro de la pequeña, por lo que los vértices de $ABCD$ están sobre la circunferencia punteada de radio 5 y perímetro 10π. Además, como no son secantes, sus centros deben estar a distancia al menos 8 uno del otro. Sin embargo, notando que una cuerda mide menos que el arco menor que la abarca (en longitud),

$$32 \leq AB + BC + CD + DA \leq \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 10\pi < 32$$

¡Contradicción!

Bibliografía

- *Manual de Olimpiadas*, escrito por la profesora Lydia Burgoa.
- *Euclidean Geometry for Mathematical Olympiads (EGMO)*, escrito por Evan Chen.
- Canguro Matemático
- Olimpiadas Panameñas de Matemática de años anteriores
- gercekboss, usuario de Instagram